

УДК 517.95

**О НУЛЯХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ  
ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ,  
ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ  $\lambda$ - КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА**

**С.З.АХМЕДОВ\*, С.Т.АЛЕСКЕРОВА\*\***

**\* Бакинский Государственный Университет**

**\*\* Азербайджанский Педагогических Государственный Университет  
s.ahmedov1973@gmail.com**

*Уравнение, представленное в работе характеризует процесс распространения тепла с различными коэффициентами теплопроводности. Асимптотика собственных значений, рассматриваемой в работе граничной задачи с регулярными граничными условиями была изучена различными учеными. В работе была построена асимптотика собственных значений граничной задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка с почти регулярными граничными условиями, содержащими комплексный параметр.*

**Ключевые слова:** фундаментальные решения, асимптотика, граничные задачи, граничные условия, сектор, характеристический определитель.

Рассматривается следующая задача:

$$p_1 p_2 y^{IV} - (p_1 + p_2) \lambda^2 y'' + \lambda^4 y - b(x) y'' - a(x) \lambda^2 y = f(x, \lambda), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L_1(y) &\equiv \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k} y^{(k-1)}(x, \lambda) \Big|_{x=0} + \sum_{k=1}^4 \beta_{1k} y^{(k-1)}(x, \lambda) \Big|_{x=1} = 0 \\ L_2(y) &\equiv \sum_{k=1}^4 \alpha_{2k} y^{(k-1)}(x, \lambda) \Big|_{x=0} + \sum_{k=1}^4 \beta_{2k} y^{(k-1)}(x, \lambda) \Big|_{x=1} = 0 \\ L_3(y) &\equiv \sum_{k=1}^4 \alpha_{3k} y^{(k-1)}(x, \lambda) \Big|_{x=0} + \sum_{k=1}^4 \beta_{3k} y^{(k-1)}(x, \lambda) \Big|_{x=1} = 0 \\ L_4(y) &\equiv \sum_{k=1}^4 \alpha_{4k} y^{(k-1)}(x, \lambda) \Big|_{x=0} + \sum_{k=1}^4 \beta_{4k} y^{(k-1)}(x, \lambda) \Big|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a(x), b(x)$  комплекснозначные функции,  $p_1, p_2, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,4}$ ) комплексные числа, удовлетворяющие условию  $\operatorname{Re} p_1 < 0, \operatorname{Re} p_2 < 0$ .

Для построения асимптотики фундаментальных решений (1),  $\lambda$ -комплексная плоскость делится на восемь секторов [1], [8].

$$S_1 = \{\lambda | \lambda_2 > k_1 \lambda_1; \lambda_2 < k_4 \lambda_1\},$$

$$S_2 = \{\lambda | \lambda_2 > k_4 \lambda_1; \lambda_2 < k_3 \lambda_1\},$$

$$S_3 = \{\lambda | \lambda_2 > k_3 \lambda_1; \lambda_2 < k_2 \lambda_1\},$$

$$S_4 = \{\lambda | \lambda_2 > k_1 \lambda_1; \lambda_2 < k_2 \lambda_1\},$$

$$S_5 = \{\lambda | \lambda_2 > k_1 \lambda_1; \lambda_2 < k_4 \lambda_1\},$$

$$S_6 = \{\lambda | \lambda_2 > k_4 \lambda_1; \lambda_2 < k_3 \lambda_1\},$$

$$S_7 = \{\lambda | \lambda_2 > k_3 \lambda_1; \lambda_2 < k_2 \lambda_1\},$$

$$S_8 = \{\lambda | \lambda_2 > k_1 \lambda_1; \lambda_2 < k_2 \lambda_1\},$$

где

$$k_1 = \frac{\cos \psi_1}{\sin \psi_1}; \quad k_2 = \frac{|\omega_3| \cos \psi_3 - |\omega_1| \cos \psi_1}{|\omega_3| \sin \psi_3 - |\omega_1| \sin \psi_1};$$

$$k_3 = \frac{\cos \psi_3}{\sin \psi_3}; \quad k_4 = \frac{|\omega_1| \cos \psi_1 + |\omega_3| \cos \psi_3}{|\omega_1| \sin \psi_1 + |\omega_3| \sin \psi_3};$$

$$\omega_1 = |\omega_1| e^{i\psi_1}; \quad \omega_2 = -\omega_1; \quad \omega_3 = |\omega_3| e^{i\psi_3}; \quad \omega_4 = -\omega_3;$$

$$|\omega_1| = |p_1|^{-\frac{1}{2}}; \quad |\omega_3| = |p_3|^{-\frac{1}{2}};$$

$$\psi_k = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} p_k}{\operatorname{Re} p_k}, \quad k = 1, 2.$$

Для нахождения асимптотики фундаментального решения уравнения (1) имеет место следующая теорема ([5], [6], [7], [11]).

**Теорема 1.**

При  $a(x), b(x) \in C^l[0,1]$ ,  $\operatorname{Re} p_1 < 0, \operatorname{Re} p_2 < 0$ , в каждом из секторов  $S_p$  ( $p = \overline{1,8}$ ) асимптотика корней фундаментального решения имеет вид

$$\frac{d^k y_m(x, \lambda)}{dx^k} = (\lambda \omega_m)^k \left[ 1 + \frac{1}{\lambda} y_{mk}^1(x) + \frac{1}{\lambda^2} y_{mk}^2(x) + \frac{E_{mk}(x, \lambda)}{\lambda^3} \right] \exp[\lambda \omega_m x],$$

$$m = \overline{1, 4}; \quad k = \overline{0, 3},$$

$$y_{mk}^1(x) = \frac{1}{4q\omega_m^3 + 2p\omega_m} \left[ \int_0^x a(\xi) d\xi + \omega_m^2 \int_0^x b(\xi) d\xi \right],$$

$$\text{где } y_{mk}^2(x) = \frac{k}{\omega_k} \frac{dy_{mk}^1(x)}{dx} + \frac{1}{4q\omega_m^3 + 2p\omega_m} \left[ \int_0^x a(\eta) + \omega_m^2 b[\eta] \right] y_{mk}^1(\eta) d\eta -$$

$$- \frac{6q\omega_m^2 + p}{4q\omega_m^3 + 2p\omega_m} \frac{dy_{mk}^1(x)}{dx},$$

$$q = p_1 p_2, \quad p = -p_1 - p_2.$$

Функции  $E_{mk}(x, \lambda)$  ( $m = \overline{1, 4}; k = \overline{0, 3}$ ), являющимися аналитическими, такие ограничены при больших  $|\lambda|$ .

Решение спектральной задачи находится при помощи функции Грина следующим образом [2]

$$y(x, \lambda) = \int_0^l G(x, \xi, \lambda) f(\xi, \lambda) d\xi,$$

где функции, являющиеся функцией Грина задачи (1),(2) определяется следующим образом:

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \lambda \in S_p \quad (p = 1, 8),$$

где

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1(x, \lambda)) & L_1(y_2(x, \lambda)) & L_1(y_3(x, \lambda)) & L_1(y_4(x, \lambda)) \\ L_2(y_1(x, \lambda)) & L_2(y_2(x, \lambda)) & L_3(y_3(x, \lambda)) & L_4(y_4(x, \lambda)) \\ L_3(y_1(x, \lambda)) & L_3(y_2(x, \lambda)) & L_3(y_3(x, \lambda)) & L_3(y_4(x, \lambda)) \\ L_4(y_1(x, \lambda)) & L_4(y_2(x, \lambda)) & L_4(y_3(x, \lambda)) & L_4(y_4(x, \lambda)) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_4(x, \lambda) & y_5(x, \lambda) \\ L_1(g)_x & L_1(y_1(x, \lambda)) & L_1(y_2(x, \lambda)) & L_1(y_3(x, \lambda)) & L_1(y_4(x, \lambda)) \\ L_2(g)_x & L_2(y_1(x, \lambda)) & L_2(y_2(x, \lambda)) & L_3(y_3(x, \lambda)) & L_4(y_4(x, \lambda)) \\ L_3(g)_x & L_3(y_1(x, \lambda)) & L_3(y_2(x, \lambda)) & L_3(y_3(x, \lambda)) & L_3(y_4(x, \lambda)) \\ L_4(g)_x & L_4(y_1(x, \lambda)) & L_4(y_2(x, \lambda)) & L_4(y_3(x, \lambda)) & L_4(y_4(x, \lambda)) \end{vmatrix},$$

$$g(x, \xi, \lambda) = \pm \sum_{k=1}^4 \frac{V_{4k}(\xi, \lambda)}{V(\xi, \lambda)} y_k(x, \lambda).$$

Здесь функция  $g(\xi, \lambda)$  берется со знаком "+", если  $0 \leq \xi \leq x \leq 1$  и со знаком "-", если  $0 \leq x \leq \xi \leq 1$ , где  $V(\xi, \lambda)$  определитель Вронского, построенный из функций  $y_1(\xi, \lambda)$ ,  $y_2(\xi, \lambda)$ ,  $y_3(\xi, \lambda)$  и  $y_4(\xi, \lambda)$ .  $V_{4k}(\xi, \lambda)$  является алгебраическим дополнением  $(4, k)$ -го элемента определителя.

На полуплоскости  $\text{Re} \lambda \geq 0$  отметим две полуоси

$$\Pi_1(\lambda) = \{\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \mid -\delta < \lambda_2 - \lambda_1 k_1 < \delta, \lambda_1 > R, \delta > 0, R > 0\}$$

$$\Pi_2(\lambda) = \{\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \mid -\delta < \lambda_2 - \lambda_1 k_3 < \delta, \lambda_1 > R, \delta > 0, R > 0\}$$

Для нахождения главной части характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$  обозначим через  $\Delta_1(\lambda)$  и  $\Delta_2(\lambda)$  главную часть определителя  $\Delta(\lambda)$  на полуосях  $\Pi_1(\lambda)$  и  $\Pi_2(\lambda)$  соответственно.

$$\Delta_1(\lambda) = D_{14}(\lambda)e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)} + D_{24}(\lambda)e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)} + D_4(\lambda)e^{\lambda\omega_4}$$

$$\Delta_2(\lambda) = D_{13}(\lambda)e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)\lambda} + D_{14}(\lambda)e^{(\omega_1+\omega_4)} + D_1(\lambda)e^{\omega_1\lambda},$$

где

$$D_{14}(\lambda) = d_{14}^{10}\lambda^{10} + d_{14}^9\lambda^9 + d_{14}^8\lambda^8 + O(\lambda^7)$$

$$D_{24}(\lambda) = d_{24}^{10}\lambda^{10} + d_{24}^9\lambda^9 + d_{24}^8\lambda^8 + O(\lambda^7)$$

$$D_{13}(\lambda) = d_{13}^{10}\lambda^{10} + d_{13}^9\lambda^9 + d_{13}^8\lambda^8 + O(\lambda^7) \quad (3)$$

$$D_1(\lambda) = d_1^9\lambda^9 + d_1^8\lambda^8 + d_1^7\lambda^7 + O(\lambda^6)$$

$$D_4(\lambda) = d_4^9\lambda^9 + d_4^8\lambda^8 + d_4^7\lambda^7 + O(\lambda^6).$$

Для нахождения асимптотики собственных значений спектральной задачи введем следующие обозначения:

$$L(\gamma_n^1, \gamma_m^2, \gamma_p^3, \gamma_q^4) = \begin{vmatrix} \gamma_{1n}^1 & \gamma_{1m}^2 & \gamma_{1p}^3 & \gamma_{1q}^4 \\ \gamma_{2n}^1 & \gamma_{2m}^2 & \gamma_{2p}^3 & \gamma_{2q}^4 \\ \gamma_{3n}^1 & \gamma_{3m}^2 & \gamma_{3p}^3 & \gamma_{3q}^4 \\ \gamma_{4n}^1 & \gamma_{4m}^2 & \gamma_{4p}^3 & \gamma_{4q}^4 \end{vmatrix},$$

$$d_1^9 = 2(\omega_1^6\omega_3^3 - \omega_1^4\omega_3^5)(L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) + L(\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4)), \quad (4)$$

$$d_4^9 = 2(\omega_1^5\omega_3^4 - \omega_1^3\omega_3^6)(L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) + L(\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4)), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
d_1^8 &= 2\left[\omega_1^3\omega_3^5 - \omega_1^5\omega_3^3\right]L(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) - L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_3) - L(\alpha_4, \beta_1, \beta_3, \beta_4) + \\
&+ L(\alpha_3, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \Big] + 2(\omega_1^6\omega_3^3 - \omega_1^4\omega_3^5)y_{13}^1(1)L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) + \\
&+ \left[2\omega_1^6\omega_3^3y_{13}^1(1) - 2\omega_1^4\omega_3^5y_{11}^1(1) + (\omega_1^6\omega_3^3 - \omega_1^4\omega_3^5)(y_{42}^1(1) + y_{32}^1(1))\right] + \\
&+ (\omega_1^6\omega_3^3 + \omega_1^5\omega_3^4)y_{31}^1(1) + (\omega_1^6\omega_3^3 - \omega_1^5\omega_3^4)y_{41}^1(1) + \\
&+ (\omega_1^5\omega_3^4 - \omega_1^4\omega_3^5)y_{43}^1(1) + (-\omega_1^4\omega_3^5 - \omega_1^5\omega_3^4)y_{33}^1(1) \Big]L(\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
d_4^8 &= 2(\omega_1^5\omega_3^3 - \omega_1^3\omega_3^5)L(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) - L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_3) + L(\alpha_3, \beta_2, \beta_3, \beta_4) - L(\alpha_4, \beta_1, \beta_3, \beta_4) + \\
&+ 2\omega_1^3\omega_3^6y_{43}^1(1) + (-\omega_1^3\omega_3^6 - \omega_1^4\omega_3^5)(y_{11}^1(1) + y_{21}^1(1)) + (-\omega_1^3\omega_3^6 + \omega_1^5\omega_3^4)(y_{22}^1(1) + \\
&+ y_{12}^1(1)) + (\omega_1^4\omega_3^5 + \omega_1^5\omega_3^4)y_{23}^1(1) + (-\omega_1^4\omega_3^5 + \omega_1^5\omega_3^4)y_{13}^1(1) \Big]L(\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
d_{13}^8 &= (\omega_1^2\omega_3^6 - \omega_1^3\omega_3^5 - \omega_1^5\omega_3^3 + \omega_1^6\omega_3^2)L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_4) + L(\alpha_1, \alpha_4, \beta_3, \beta_4) + \\
&+ (\omega_1^3\omega_3^5 - 2\omega_1^4\omega_3^4 + \omega_1^5\omega_3^3)L(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3, \beta_4) + L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3) + \\
&+ (-\omega_1^2\omega_3^6 + 2\omega_1^4\omega_3^4 - \omega_1^6\omega_3^2)L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_4) + \\
&+ [(\omega_1^5\omega_3^4 - \omega_1^3\omega_3^6)(y_{12}^1(1) + y_{33}^1(1)) + (\omega_1^4\omega_3^5 - \omega_1^6\omega_3^3)(y_{13}^1(1) + y_{32}^1(1))]L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_3, \beta_4)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
d_{14}^8 &= (\omega_1^5\omega_3^3 + 2\omega_1^4\omega_3^4 + \omega_1^3\omega_3^5)L(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3, \beta_4) + L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3) - \\
&- (\omega_1^6\omega_3^2 + \omega_1^5\omega_3^3 + \omega_1^5\omega_3^3 + \omega_1^2\omega_3^6)L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_4) + L(\alpha_1, \alpha_4, \beta_3, \beta_4) + \\
&+ (\omega_1^6\omega_3^2 - 2\omega_1^4\omega_3^4 + \omega_1^2\omega_3^6)L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_4) + \\
&+ [(\omega_1^5\omega_3^4 + \omega_1^6\omega_3^3)(y_{13}^1(1) + y_{41}^1(1)) + (-\omega_1^3\omega_3^6 - \omega_1^4\omega_3^5)(y_{11}^1(1) + y_{43}^1(1))]L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_4) + \\
&+ [(\omega_1^4\omega_3^5 - \omega_1^6\omega_3^3)(y_{13}^1(1) + y_{42}^1(1)) + (\omega_1^3\omega_3^6 - \omega_1^5\omega_3^4)(y_{12}^1(1) + y_{43}^1(1))]L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_3, \beta_4),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
d_{24}^8 &= (\omega_1^5\omega_3^3 - 2\omega_1^4\omega_3^4 + \omega_1^3\omega_3^5)L(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3, \beta_4) + L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3) + \\
&+ (\omega_1^6\omega_3^2 - \omega_1^3\omega_3^5 - \omega_1^5\omega_3^3 + \omega_1^2\omega_3^6)L(\alpha_1, \alpha_4, \beta_3, \beta_4) + L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_4) + \\
&+ (-\omega_1^6\omega_3^2 + 2\omega_1^4\omega_3^4 - \omega_1^2\omega_3^6)L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_4) + \\
&+ (-\omega_1^6\omega_3^3 + \omega_1^5\omega_3^4)y_{23}^1(1) + (\omega_1^4\omega_3^5 - \omega_1^3\omega_3^6)y_{21}^1(1) \Big]L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_4) + \\
&+ (\omega_1^6\omega_3^3 - \omega_1^4\omega_3^5)y_{42}^1(1) + (\omega_1^3\omega_3^6 - \omega_1^5\omega_3^4)y_{43}^1(1) \Big]L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_3, \beta_4),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
d_1^7 = & d_1^7 + \left\{ -\omega_1^4 \omega_3^5 \left[ 2y_{13}^2(1) + 2y_{21}^2(0) + 2y_{32}^2(0) + y_{43}^2(0) + y_{33}^2(0) + y_{42}^2(0) \right] + \right. \\
& + \omega_1^5 \omega_3^4 \left[ -y_{31}^2(0) - y_{43}^2(0) + y_{33}^2(0) + y_{41}^2(0) \right] \\
& + \omega_1^6 \omega_3^3 \left[ 2y_{13}^2(1) + 2y_{23}^2(1) + y_{31}^2(1) + y_{42}^2(1) + y_{32}^2(1) + y_{41}^2(1) \right] + L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) + \\
& + \left\{ -\omega_1^4 \omega_3^5 \left[ 2y_{11}^2(1) + 2y_{23}^2(0) + y_{32}^2(1) + y_{43}^2(1) + y_{33}^2(1) + y_{42}^2(1) + \right. \right. \\
& + y_{11}^1(1)y_{32}^1(1) + y_{11}^1(1)y_{42}^1(1) + y_{32}^1(1)y_{43}^1(1) + y_{11}^1(1)y_{33}^1(1) + y_{11}^1(1)y_{42}^1(1) + y_{33}^1(1)y_{42}^1(1) \left. \right] + \\
& + \omega_1^5 \omega_3^4 \left[ y_{13}^2(1) + y_{43}^2(1) - y_{33}^2(1) - y_{41}^2(1) + y_{12}^1(1)y_{31}^1(1) + y_{12}^1(1)y_{43}^1(1) + \right. \\
& + y_{31}^1(1)y_{43}^1(1) - y_{12}^1(1)y_{33}^1(1) - y_{12}^1(1)y_{41}^1(1) - y_{33}^1(1)y_{41}^1(1) \left. \right] + \\
& + \omega_1^6 \omega_3^3 \left[ 2y_{13}^2(1) + 2y_{43}^2(0) + y_{31}^2(1) + y_{42}^2(1) + y_{32}^2(1) + y_{41}^2(1) + \right. \\
& + y_{13}^1(1)y_{31}^1(1) + y_{13}^1(1)y_{42}^1(1) + y_{31}^1(1)y_{42}^1(1) + y_{13}^1(1)y_{32}^1(1) + y_{13}^1(1)y_{41}^1(1) + \\
& \left. + y_{32}^1(1)y_{41}^1(1) \right\} L(\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4)
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
d_4^7 = & d_4^7 + \left\{ -\omega_1^3 \omega_3^6 \left[ y_{11}^2(0) + y_{22}^2(0) + 2y_{33}^2(0) + 2y_{43}^2(1) + y_{12}^2(0) + y_{21}^2(0) \right] + \right. \\
& + \omega_1^4 \omega_3^5 \left[ y_{13}^2(0) + y_{21}^2(0) - y_{11}^2(0) - y_{23}^2(0) \right] + \\
& + \omega_1^5 \omega_3^4 \left[ y_{12}^2(0) + y_{23}^2(0) + 2y_{31}^2(0) + 2y_{43}^2(1) + y_{13}^2(0) + y_{22}^2(0) \right] L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) + \\
& + \left\{ -\omega_1^3 \omega_3^6 \left[ y_{11}^2(1) + y_{22}^2(1) + 2y_{33}^2(0) + y_{43}^2(1) + y_{12}^2(1) + y_{21}^2(1) + y_{43}^2(1) + \right. \right. \\
& + y_{11}^1(1)y_{22}^1(1) + y_{11}^1(1)y_{43}^1(1) + y_{22}^1(1)y_{43}^1(1) + y_{12}^1(1)y_{21}^1(1) + y_{12}^1(1)y_{43}^1(1) + y_{21}^1(1)y_{43}^1(1) \left. \right] + \\
& + \omega_1^4 \omega_3^5 \left[ y_{11}^2(1) + y_{23}^2(1) - y_{13}^2(1) - y_{21}^2(1) + y_{11}^1(1)y_{23}^1(1) + y_{11}^1(1)y_{42}^1(1) - y_{13}^1(1)y_{21}^1(1) - \right. \\
& - y_{13}^1(1)y_{42}^1(1) - y_{21}^1(1)y_{42}^1(1) \left. \right] + \omega_1^5 \omega_3^4 \left[ y_{12}^2(1) + y_{23}^2(1) + y_{13}^2(1) + y_{22}^2(1) + 2y_{33}^2(0) + 2y_{41}^2(1) + \right. \\
& + y_{12}^1(1)y_{23}^1(1) + y_{12}^1(1)y_{41}^1(1) + y_{23}^1(1)y_{41}^1(1) + y_{13}^1(1)y_{22}^1(1) + y_{13}^1(1)y_{41}^1(1) + \\
& \left. + y_{22}^1(1)y_{41}^1(1) \right\} L(\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4).
\end{aligned} \tag{12}$$

Теперь попытаемся найти асимптотику корней уравнения  $\Delta(\lambda) = 0$  при почти регулярных условиях первого порядка. Для асимптотики корней уравнения  $\Delta_1(\lambda) = 0$  на полуоси  $\Pi_1(\lambda)$  имеет место теорема

**Теорема 2.**

Пусть уравнение (1) и граничные условия (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$Re p_i < 0 \quad (i = 1, 2), \quad a(x), b(x) \in C^3[0, 1],$$

$$L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4) = 0, L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_4) - L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_3, \beta_4) = 0.$$

При  $L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) + L(\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \neq 0$

$L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_4)$ ,  $L(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3, \beta_4) + L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3)$  и

$L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_4) + L(\alpha_1, \alpha_4, \beta_3, \beta_4)$  если одно из выражений отлично от нуля, тогда для корней уравнения  $\Delta_1(\lambda) = 0$  имеет место формула.

$$\lambda_{k\nu} = -\frac{1}{2\omega_k} \left\{ \ln \left| \frac{\pi\nu A_k}{\omega_k} \right| + i \left[ 2\pi\nu + \frac{\pi}{2}(2 - \operatorname{sgn} \nu) + \arg A_k \right] \right\} + O\left(\frac{\ln|\nu|}{\nu}\right), \quad k=1,2,$$

$$k=1,2, \quad (-1)^k \nu \rightarrow +\infty,$$

$$A_1 = -\left( \frac{d_4^2}{2d_4^9 d_{14}^8} - \frac{d_{24}^8}{(d_4^9)^2} - \frac{d_4^7}{2d_{14}^8} \right)^{-1}, \quad A_2 = \frac{d_4^9}{d_{14}^8}.$$

**Доказательство.**

Представим старшую часть  $\Delta_1(\lambda)$  определителя  $\Delta(\lambda)$  на полуоси  $\Pi_1(\lambda)$  в виде:

$$\Delta_1(\lambda) = D_{14}(\lambda)e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)} + D_{24}(\lambda)e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)} + D_4(\lambda)e^{\lambda\omega_4}.$$

При условиях теоремы выражения для  $D_{14}(\lambda)$ ,  $D_{24}(\lambda)$  и  $D_4(\lambda)$  можно представить в виде:

$$D_{14}(\lambda) = d_{14}^8 \lambda^8 + O(\lambda^7),$$

$$D_{24}(\lambda) = d_{24}^8 \lambda^8 + O(\lambda^7),$$

$$D_4(\lambda) = d_4^9 \lambda^9 + d_4^8 \lambda^8 + d_4^7 \lambda^7 + O(\lambda^6).$$

Учитывая эти выражения в уравнении  $\Delta_1(\lambda) = 0$ , имеем:

$$\left[ d_{14}^8 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] e^{\lambda\omega_1} + \left[ d_{24}^8 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] e^{\lambda\omega_2} + \left[ d_4^9 \lambda + d_4^8 + d_4^7 \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] = 0 \quad (13)$$

$$D^{\frac{1}{2}} = d_4^9 \lambda + d_4^8 + \frac{d_4^9 d_4^7 - 2d_{14}^8 d_{24}^8}{(d_4^9)^2} \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Уравнение (13) имеет следующие корни:

$$e^{\omega_1 \lambda} = \frac{1}{2d_{14}^8 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \left[ -\left( d_4^9 \lambda + d_4^8 + d_4^7 \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) \pm D^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$\frac{1}{2d_{14}^8 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{2d_{14}^8} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

Выражая через асимптотические формулы, получим:

$$e^{\omega_1 \lambda} = -\frac{d_4^9}{d_{14}^8} \lambda + O(1), \quad \lambda \in \Pi_1(\lambda, \psi_1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (14)$$

$$e^{\omega_k \lambda} = \left( \frac{d_4^7}{2d_4^9 d_{14}^8} - \frac{d_{24}^8}{(d_4^9)^2} - \frac{d_4^7}{2d_{14}^8} \right) \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \in \Pi_1(\lambda), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Легко показать, что  $O(e^{\omega_k \lambda}) = O(1)$ ,  $\lambda \in \Pi_1(\lambda)$   $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Формулы (14) и (15) можно переписать следующим образом:

$$A_k \lambda e^{\omega_k \lambda} + 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0, \quad k = 1, 2$$

$$A_1 = \left( \frac{-d_4^7}{2d_4^9 d_{14}^8} + \frac{d_{24}^8}{(d_4^9)^2} + \frac{d_4^7}{2d_{14}^8} \right)^{-1},$$

$$A_2 = \frac{d_4^9}{d_4^8}.$$

При применении одного из методов [2], [3],[4],[9] можно найти асимптотические формулы корней уравнения, определяемого формулами (14), (15).

$$A_k \lambda e^{\omega_k \lambda} + 1 = 0, \quad k = 1, 2$$

$$\lambda_{k\nu} = -\frac{1}{2\omega_k} \left\{ \ln_0 \left[ -A_k \alpha_\nu \frac{-\pi i \nu}{\omega_k} \right] + 2\pi i \nu \right\}, \quad (16)$$

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{\ln|\alpha_\nu|}{2\pi i \nu} + O\left[\frac{\ln|\nu|}{\nu}\right].$$

Отсюда получаем,

$$\ln_0 \alpha_\nu = O\left[\frac{\ln|\nu|}{\nu}\right]. \quad (17)$$

Учитывая (17) в (16), получим асимптотическую формулу для корней уравнения (13):

$$\lambda_{k\nu} = -\frac{1}{2\omega_k} \left\{ \ln \left( A_k \frac{\pi}{\omega_k} \nu \right) + i \left[ 2\pi \nu + \frac{\pi}{2} (2 - \operatorname{sgn} \nu) + \arg A_k \right] \right\} + O\left[\frac{\ln|\nu|}{\nu}\right], \quad (-1)^k \nu \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема:

**Теорема 3.** Коэффициенты уравнения (1) и граничного условия (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$\operatorname{Re} p_i < 0 \quad (i = 1, 2), \quad a(x), b(x) \in C^3[0, 1],$$

$$L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4) = 0, \quad L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_4) - L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_3, \beta_4) = 0,$$

$$\text{При } L(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4) + L(\alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \neq 0$$

$L(\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_4); L(\alpha_2, \alpha_3, \beta_3, \beta_4) + L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_4)$  и  $L(\alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_4) + L(\alpha_1, \alpha_4, \beta_3, \beta_4)$  при отличие от нуля одного из выражений верно для корней уравнения  $\Delta_2(\lambda) = 0$  следующее

$$\lambda_{kv} = -\frac{1}{2\omega_k} \left\{ \ln \left| \frac{\pi v A_k}{\omega_k} \right| + i \left( 2\pi v + \frac{\pi}{2} (2 - \operatorname{sgn} v) + \arg A_k \right) \right\} + O\left(\frac{\ln|v|}{v}\right),$$

$$k = 3, 4, \quad (-1)^k v \rightarrow +\infty,$$

где

$$A_3 = \left( \frac{-d_1^7}{2d_1^9 d_{13}^8} + \frac{d_{14}^8}{(d_1^9)^2} + \frac{d_1^7}{2d_{13}^8} \right)^{-1}, \quad A_4 = \frac{d_1^9}{d_{13}^8},$$

$d_{13}^8, d_{14}^8, d_1^9, d_1^8, d_1^7$  представлены формулами (8), (9), (4), (6), (11) соответственно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964, 458 с.
2. Жданович В.Ф. Формулы для нулей полиномов Дирихле и квазиполиномов. ДАН СССР, 1960, т.135, №5, с.1046-1049.
3. Лидский В.Б. Садовничий В.А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций. Матем.сб., 1968, т.75(117), №4, с.558-566.
4. Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белаббаси Ю.О нулях целых функций одного класса. Тр.сем. им. И.Г.Петровского, М., 1982, в. 8, с.211-217.
5. Мамедов Ю.А. О задаче Штурма-Лиувилла в случае комплексной плотности // Вестник Бакинского Государственного Университета, сер. физ.-мат. наук, 1988, №1, с. 133-142.
6. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983, 352 с.
7. Мамедов Ю.А., Масталиев В.Ю. О разрешимости смешанных задач для одного нового класса уравнений, могущих перейти с параболического типа на Антипараболический // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2002, №4 с. 93-104.
8. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи. Вестник БГУ сер., физ.-мат. наук, 2005, № 2, с. 5-12.
9. Мамедов Ю.А., Нагиева Р.И. Математический анализ критических задач электродинамики. Баку: Элм, 2010, 181 с.
10. Əhmədov S.Z., Abbasova A.X., Ələsgərova S.T. Dörd tərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün bir qarışıq məsələnin kontur inteqralı üsulu ilə həlli. Riyaziyyat və İKT-nin tətbiq sahələri. Yeni tədris texnologiyaları. Beynəlxalq konfrans, 05-06 iyun 2014, Gəncə, s.155-157.
11. Əhmədov S.Z., Ələsgərova T.  $\lambda$ -kompleks parametrdən asılı dördüncü tərtib tənliyin fundamental həllərinin asimptotikasının qurulması. BDU-nun Xəbərləri, 2012, №1, s.70-77.

**$\lambda$ -KOMPLEKS PARAMETRDƏN ASILI OLAN BİR SPEKTRAL MƏSƏLƏNİN  
XARAKTERİSTİK DETERMİNANTININ SIFIRLARI HAQQINDA**

**S.Z.ƏHMƏDOV, S.T.ƏLƏSGƏROVA**

**XÜLASƏ**

İşdə baxılan tənlik müxtəlif istilikkeçirmə əmsallarına malik istiliyin yayılması prosesini xarakterizə edir. Baxılan sərhəd məsələsi requlyar sərhəd şərtləri daxilində məxsusi ədədlərinin asimptotikası müxtəlif alimlər tərəfindən araşdırılmışdır. Sanki requlyar sərhəd şərtləri daxilində kompleks parametrdən asılı dörd tərtibli tənlik üçün sərhəd məsələnin məxsusi ədədlərinin asimptotikası qurulmuşdur.

**Açar sözlər:** Fundamental həllər, asimptotika, sərhəd məsələsi, sərhəd şərtləri, sektor, xarakteristik determinant.

**ON ZEROS OF THE CHARACTERISTIC DETERMINANTS OF ONE SPECTRAL  
PROBLEM DEPENDENT ON  $\lambda$ -COMPLEX PARAMETER**

**S.Z.AHMADOV, S.T.ALASGAROVA**

**SUMMARY**

Equation considered in the present work characterizes heat conductivity processes with different heat coefficients. Asymptotics of the eigenvalues of the considered boundary problem with regular boundary conditions has been studied by different scientists.

The asymptotics of the eigenvalues of a boundary problem for the fourth order differential equation with semiregular boundary conditions with complex parameter was constructed in the present work.

**Key words:** Fundamental solutions, asymptotic, boundary problem, boundary conditions, sector, characteristic determinant.

*Поступила в редакцию: 24.06.2014 г.*

*Подписано к печати: 13.02.2015 г.*